Появление цифр, букв, иероглифов в процессе счёта и распределения продуктов в древности на Ближнем Востоке. Связь с неолитической революцией.

Несколько тысяч лет назад люди перешли от собирательства и охоты к земледелию и животноводству. Они стали обмениваться продуктами своего труда. Для такого обмена, а еще для передачи знаний потребовалось вести записи, зарубок на палочках уже не хватало, тогда и возникли первые знаки для записи чисел.

В Египте люди догадались использовать отдельные значки для каждого разряда: для единиц просто палочка 𓏺, для десятков — дуга 𓎆, для сотен — значок 𓍢. Чтобы показать количество единиц или десятков или сотен, приходилось нужный значок повторять несколько раз. Например, число 152 записывали так:

𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺

Как ты думаешь, удобны ли такие значки для записи чисел? Давай попробуем.

Задание. Запиши привычными цифрами число, которое египтяне записывали так: 𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺.

Задание. Сосчитай:

𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺 прибавить 𓍢𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺

𓍢𓍢∩∩∩III отнять 𓍢∩IIIIIII

Задание. Вычисли. Расположи полученные ответы в порядке возрастания и расшифруй название знака древнеегипетской письменности.

О	9560 · 590	Г	46 666 662 : 6
Л	35 200 · 708	Р	66 666 000 : 75
Ф	67 409 · 4070	Е	2 953 560 : 326
И	8403 · 5016	И	8 215 200 : 8400

Рождение шестидесятеричной системы счисления. Появление десятичной записи чисел.

Древние вавилоняне писали острыми палочками на глиняных дощечках, палочки были заточены, поэтому удобнее всего было писать такими палочками черточки в виде клиньев. Вавилонскую письменность так и называли клинописью. Цифр у вавилонян было всего две: вертикальный клин обозначал единицу, а два клина уголком обозначали десяток. Получалось так:  25,  47.

Запиши привычными цифрами числа, которые вавилоняне записывали так:

, , 

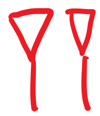
Сосчитай:

 умножить на 

 прибавить 

Вавилоняне особенно выделяли число 60. Вслед за ними мы насчитывает 60 секунд в минуте и 60 минут в часе. Для 60 у них особого значка не было, 60 обозначили таким же клином, как единицу, только оставляли промежуток. Нарпример, число 61 записывали так:

а число 2 — очень похоже, только без промежутка:



Конечно, такие записи иногда приводили к путанице, а это неудобно. Чтобы ты предложил вавилонянам, чтобы избежать путницы?

Рождение и развитие арифметики натуральных чисел. НОК, НОД, простые числа. Решето Эратосфена.

С самых древних времен для решения жизненно важных вопросов людям приходилось считать предметы и измерять величины, то есть отвечать на вопрос «Сколько?»: сколько овец в стаде, сколько мер зерна собрано с поля, сколько верст от села до уездного центра и т. д. Так появились ***числа***. Как иногда в шутку говорят математики, «Бог создал натуральные числа, а все остальное – дело рук человеческих».
Для ответа на более сложные вопросы – например, сколько овец в двух стадах, у кого из двух земледельцев урожай больше – понадобилось научиться складывать числа, сравнивать их между собой. Так постепенно, в течение тысячелетий, формировалось понятие числа. Люди учились называть и записывать числа, проводить с ними вычисления и создали тот пласт математической культуры, который в дальнейшем был назван ***арифметикой***.
С древнейших времен математиков интересовали простые числа. Само понятие простого числа было введено древнегреческим ученым Пифагором еще в VI веке до н. э. А в III веке до н. э. Евклид доказал, что простых чисел

бесконечно много (то есть за каждым простым числом есть еще большее простое число).
Другой греческий математик того же времени, Эратосфен, придумал остроумный способ составления списка простых чисел, который иногда используется в практических вычислениях и сегодня. Он записывал все числа от 1 до какого-либо числа, вычеркивал из него 1, а затем последовательно вычеркивал кратные 2, 3, 5, 7 и т.д. Каждый раз вычеркивались кратные первого «уцелевшего» числа (кроме, разумеется, самого этого числа):

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~

Так как греки делали записи на покрытых воском табличках, а числа не вычеркивали, а выкалывали иглой, то таблица в конце вычислений напоминала решето. С тех пор метод Эратосфена называют «решетом Эратосфена»: в этом решете простые числа «отсеиваются» от остальных.

Бумага и карандаш — большее изощренные орудия, чем восковая табличка и палочка, — позволяют отсеивать простые числа куда быстрее.

Объясни, почему в этой таблице остались нераскрашенными только простые числа:

2	3	4	5
6	7	8	9
10	11	12	13
14	15	16	17
18	19	20	21
22	23	24	25
26	27	28	29
30	31	32	33
34	35	36	37

38	39	40	41
42	43	44	45
46	47	48	49

Попробуй сам в следующих таблицах провести несколько линий, которые вычеркивают все целые числа и только их:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98	99	100	101

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Математики всех времен пытались глубже проникнуть в природу простых чисел.

В 1742 году математик Кристиан Гольдбах в письме Леонарду Эйлеру высказал следующую гипотезу: каждое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел.

В середине XIX в. Пафнутий Львович Чебышёв, великий русский математик, открыл формулу, приближенно выражающую количество простых чисел на любом отрезке натурального ряда.

Гипотезу Гольдбаха совсем недавно, в 2013 году, доказал Харальд Хельфготт, математик из Перу.

Есть похожая, но до сих пор не доказанная гипотеза о четных числах: любое четное число, начиная с 4, представимо в виде суммы двух простых чисел.

Задание. Спланируйте с товарищами работу в группе и проверьте эту гипотезу для четных чисел от 4 до 30:

$$4 = \square + \square;$$

$6 = \square + \square;$

$8 = \square + \square;$

$10 = \square + \square;$

$12 = \square + \square;$

$14 = \square + \square;$

$16 = \square + \square;$

$18 = \square + \square;$

$20 = \square + \square;$

$22 = \square + \square;$

$24 = \square + \square;$

$26 = \square + \square;$

$28 = \square + \square;$

$30 = \square + \square.$

Появление нуля и отрицательных чисел в математике древности. Роль Диофанта. Почему $(-1)(-1) = +1$?

Египтяне и вавилоняне не знали отрицательных чисел. Они могли бы появиться в древней Греции как решения линейных уравнений, но этого не случилось. Даже греческий математик Диофант (около III века н. э.), которого называют «отцом алгебры», не признавал их.

В его сочинениях появились обозначения для неизвестных и правила преобразования уравнений, довольно сложных. Но уравнения с отрицательными корнями Диофант считал бесполезными. Например, он называет абсурдным уравнение $4 = 4x + 20$, поскольку оно приводит к бессмысленному решению. В своих книгах, по которым обучались многие поколения математиков, Диофант не давал задач, которые приводят уравнениями с отрицательными корнями.

В древних Китае и Индии отрицательные числа называли словами, которые означали «долг», «недостача». Правила работы с такими числами тоже описывались словами «имущество» (для положительных чисел) и «долг» (для отрицательных).

Задание. Постараемся выразить индийские правила работы с числами в современных обозначениях. Продолжи заполнять таблицу, считая, что a, b, c — положительные числа.

В древней Индии	**В наше время**

Сумма двух имуществ есть имущество	
Сумма двух долгов есть долг	$(-a)+(-b)=-c$
Сумма имущества и долга равна их разности	$a+(-b)=a-b$
Сумма нуля и долга есть долг	
Сумма нуля и имущества есть имущество	
Долг, вычитаемый из нуля, становится имуществом	
Имущество, вычитаемое из нуля, становится долгом	

Сформулировать правила умножения отрицательных чисел оказалось еще сложнее. Если умножить долг на долг, что получится? Долг или имущество? Казалось бы, неразумно предположить, что от умножения долгов имущество не появится. Но оказывается, кроме таких предположений, есть непреложные требования: для новых «долговых» чисел должны выполняться уже известные законы арифметики. Они лежат в фундаменте всей математики и нельзя допустить, чтобы они нарушались.

Задание. Сравни два «правила» $(-1)\cdot(-1)=1$ и $(-1)\cdot(-1)=-1$. Как они согласуются с законами арифметики? Примени эти правила и вычисли двумя способами значения выражения

$$(-1)\cdot(-1+1).$$

Вычисляя первым способам, сначала найди сумму в скобках, а затем выполни умножение. Вычисляя вторым способом, сначала раскрой скобки, а затем сложи. Запиши результаты в таблицу.

	Сначала сложить числа в скобках	Сначала раскрыть скобки
С использованием первого «правила» $(-1)\cdot(-1)=1$		

С использованием второго «правила» $(-1)\cdot(-1)=-1$		

Проанализируй результаты и ответь на вопросы.

Какими еще правилами ты пользовался для вычислений?

____

____

С каким правилом оба способа приводят к одинаковым результатам?

____

С каким правилом оба способа приводят к разным результатам?

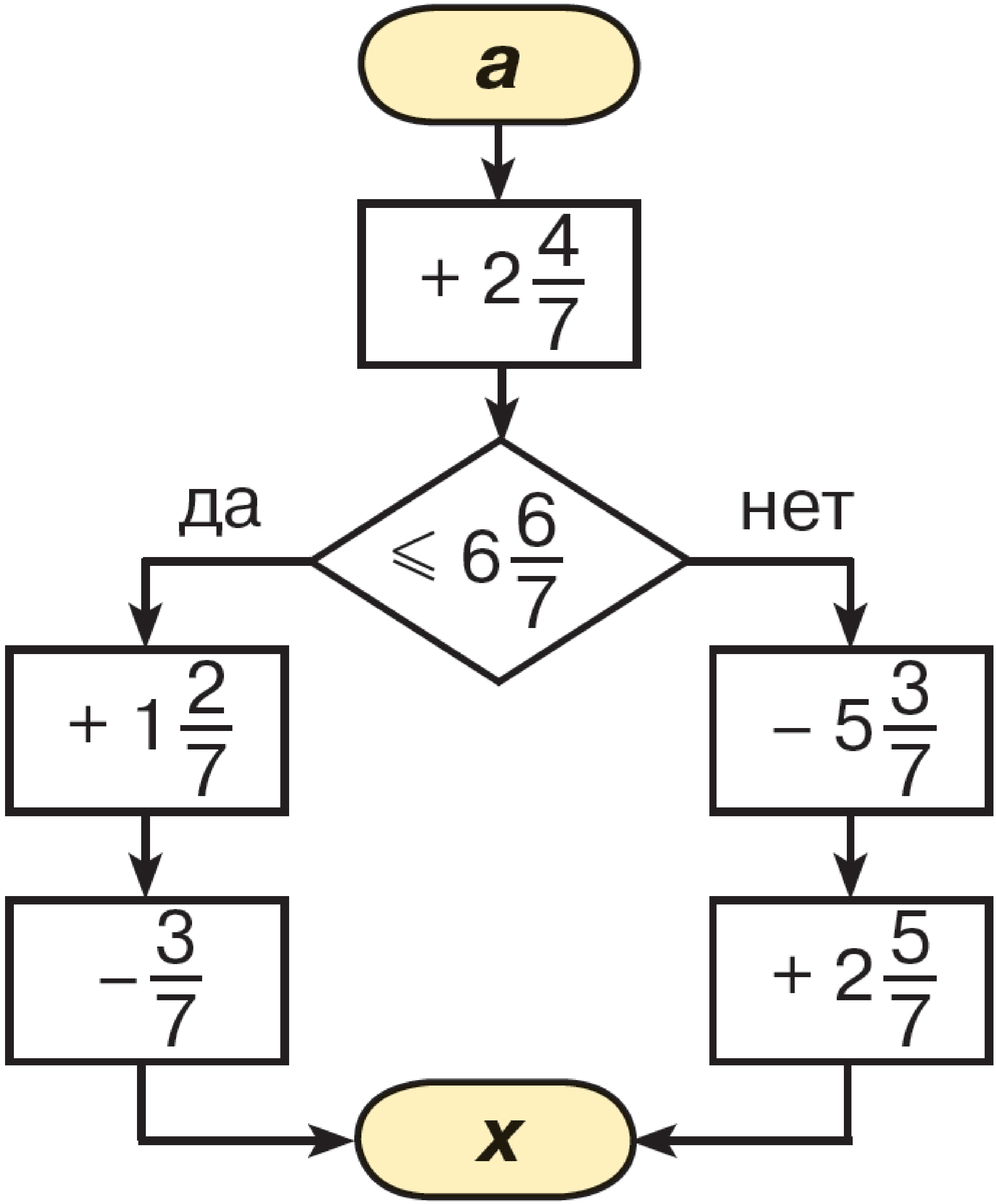
____

Какое правило кажется тебе более разумным?

____

В средние века европейским математикам было сложно провести такое исследование, потому что очень долгое время они не признавали нуль числом. Цифра нуль существовала давно; она обозначала отсутствие какой-либо разрядной единицы. А нуль как число окончательно закрепил свои позиции только с появлением координат и числовой оси. Геометрическая картинка убедила всех, что отрицательные числа и нуль — самые настоящие числа, ведь они обозначают точки на числовой оси, точно так же, как положительные числа.

Задание. Вычисли значения $\boldsymbol{x}$. Расположи их в порядке убывания и расшифруй имя известного древнегреческого математика.



a	$1\frac{1}{7}$	2	$3\frac{4}{7}$	$4\frac{2}{7}$	$5\frac{6}{7}$	$6\frac{3}{7}$	$7\frac{5}{7}$
x							
	Т	**Н**	**О**	**Д**	**А**	**Ф**	**И**

Дроби в Вавилоне, Древнем Египте, Древнем Риме. Открытие десятичных дробей.

Еще за 3000 лет до н.э. жители древнего Вавилона приняли систему мер, в которой меньшая единица составляла $\frac{1}{60}$ высшей единицы. Потому для них было естественно перейти к дробям $\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \frac{1}{60^3}, \ldots$ Следы этой системы сохранились до наших дней: у нас есть специальные названия для одной шестидесятой часа — это минута, и для одной шестидесятой минуты — это секунда. Точно так же, измеряя углы, один градус делят на 60 минут, а одну минуту — на 60 секунд. Измерение углов было очень важно для астрономии, поэтому в средние века шестидесятеричные дроби называли иногда астрономическими.

Вавилоняне работали только с ограниченным набором дробей, поэтому не приводили их «к общему знаменателю». Да и записывать эти дроби было проще — дробные части записывались теми же значками, что и целые.

Задание. Вырази в шестидесятеричных дробях числа:

а) $\frac{4}{5}$, б) $\frac{5}{8}$, в) $\frac{7}{54}$.

Задание. Вырази время в часах дробью с возможно меньшим знаменателем:

а) 15 минут 12 секунд; б) 7 минут 30 секунд; в) 23 минуты 20 секунд.

Древние египтяне пошли по другому пути. Они работали с долями: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$, — это дроби, у которых в числителе стоит единица. Древние египтяне других дробей и не знали, если им требовалось представить какую-нибудь другую дробь, они представляли ее в виде суммы разных долей.

Например, если в результате измерения получалось дробное число $\frac{3}{4}$, они записывали его как сумму долей $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Существовали специальные таблицы для представления дробей в виде суммы долей.

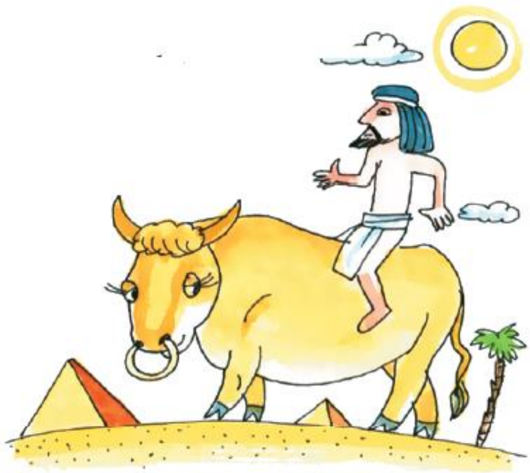
Задание. Почувствуй себя жителем древнего Египта: представь следующие дроби в виде суммы разных долей:

а) $\frac{2}{11}=\frac{1}{\square}+\frac{1}{66}$;

б) $\frac{2}{7}=\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{21}$;

в) $\frac{2}{13}=\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{104}$;

г) $\frac{2}{99}=\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}$.

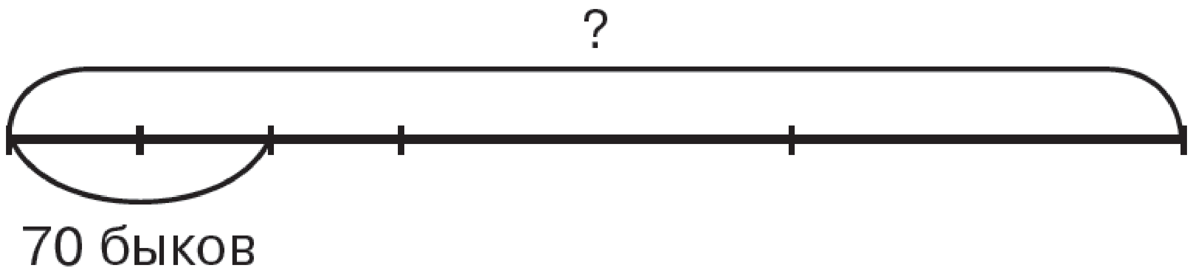


Задача из «Папируса Ахмеса» (Египет, 1850 г. до н. э.) Приходит пастух с 70 быками. Его спрашивают:

– Сколько приводишь ты своего многочисленного стада?

Пастух отвечает:

– Я привожу две трети от трети скота. Сочти!



В древней Греции научились работать с отношениями, откуда уже недалеко было до обыкновенных дробей. Эратосфен, вычислявший длину земного меридиана, писал, то часть меридиана между тропиками содержит 11 таких частей, каких весь меридиан содержит 83. Выражения вроде «отрезок меридиана между тропиками равен $\frac{11}{83}$ всего меридиана» ещё не вошли в научный обиход.

Интересная система дробей была принята в Древнем Риме. Она основывалась на делении древнеримской единицы массы, которая называлась *асс*. Асс делили на 12 равных частей. Двенадцатую часть асса называли *унцией*. Со временем унции стали применять для измерения других величин. Например, римлянин мог сказать, что он прошёл 7 унций пути. При этом речь, конечно, не шла о взвешивании пути. Имелось в виду, что пройдено семь «двенадцатых долей» пути.

Так постепенно происходил переход от конкретных дробей к отвлечённым дробям, не связанным с какой-нибудь определённой мерой.

Задание. Объясни, почему на вопрос учителя «сколько останется, если из пяти унций отнять одну» ученик должен был ответить «одна треть». Как следовало отвечать на вопрос «сколько станет, если к пяти унциям добавить одну»?

Старинные системы мер. Десятичные дроби и метрическая система мер.

Задание. Названия старинных мер встречаются в устоявшихся выражениях. Прочитай такие выражения и впиши названия старинных мер. Узнай, какие количества они выражают. Составь аналогичное задание для товарища.

____________________ коломенская (о высокорослом человеке).

Косая ____________________________ в плечах.

Мерить на свой ____________________________________.

От горшка два вершка (о детях).

Семь _________________________ во лбу.

Мал ____________________________, да до́рог.

Узнать, почём __________________ лиха.

Ни ________________________________ земли (не уступить).

Бешеной собаке семь __________________________ не крюк.

Съесть ________________________ соли вместе.

Проглотить ________________________________.

Семь _________________________под килем!

Л. Магницкий.

Сергей делал реферат о первом русском учебнике по математике и его авторе, Леонтии Филипповиче Магницком. К сожалению, Сергей допустил несколько фактических ошибок. Вместе с товарищами узнайте как можно больше по этой теме и исправьте ошибки, допущенные Сергеем.

Леонтии Филипповиче Магницком родился в 1669 году. Подростком он попал в Иосифо-Волоколамский монастырь как возчик для доставки рыбы. Он поразил монахов своей образованностью и был оставлен в обители для дальнейшего обучения.

Затем молодой человек обучался в Славяно-греко-латинской академии, где и изучал математику. При встрече с Петром I он произвел столь сильное впечатление на царя своими большими познаниями, что тот жаловал ему фамилию Магницкий (от лат. **magnum** — «большое, великое»).

Книга «Арифметика, или наука числительная», написанная Леонтием Филипповичем Магницким, сыграла важную роль в развитии русской науки. Великий русский учёный Михаил Васильевич Ломоносов называл её вместе с учебником грамматики «вратами своей учёности».

Книга Магницкого называлась «Арифметика», но, кроме арифметики, там были начала алгебры, геометрии, тригонометрии и даже немного химии. Это была настоящая энциклопедия по математике, в которой каждое правило, каждый приём подробно разъяснялся и подкреплялся решением примеров и практических задач.

Задание.

Расположи дроби в порядке возрастания и расшифруй фамилию известного русского учёного XVIII века. Чем знаменит этот учёный?

$\frac{8}{19}$	$\frac{17}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{11}{19}$	$\frac{14}{19}$	$\frac{10}{19}$	$\frac{1}{19}$
О	В	М	О	Н	С	О	О	Л

Дополнительная литература

Н. Я. Виленкин, И. Я. Депман. *За страницами учебника математики*. — М.: Просвещение, 1989.

Г. И. Глейзер. *История математики в школе*. — М., Просвещение, 1964.

И. Я. Депман, *История арифметики*. — М., Просвещение, 1965.